Strukturalismus a jeho problémy[1]

Prokop Sousedík

SOUSEDÍK, P.: Structuralism and its problems. *Studia Aloisiana*, 2019. In Shapiro's opinion, it should be taken seriously what mathematicians say (faithfulness constraint) and at the same time do not attempt to revise the results they reach (minimalism constraint). When arithmetic is viewed from this perspective, one reaches the conclusion that a number is a relational object and therefore structuralism is justified. However, difficulties arise once the limits of common arithmetic are crossed. Then it turns out that numbers are also operated in ways that contradict structuralism. That can lead one either to doubt structuralism as a whole, or to reject Shapiro's constraints. We prefer the latter alternative, whereby we reject Shapiro's constraints only partially. They remain valid in the context of well-established mathematical practice, let us say arithmetic; it poses difficulties in spheres that as yet lack clear contours, for instance when mathematicians say $2_{real}=2_{nat}$. Although they understand statements of such type, we think that the way they express them is misleading and often confused. And we think that in such circumstances philosophers have the right to take part in creating more exact means of expression. Obviously, this proposal weakens both Shapiro's constraints.
Keywords: ante rem structuralism, arithmetic, number, identity

V dějinách filosofie matematiky lze podle našeho soudu rozlišit dva podstatně odlišné myšlenkové postupy, jak uvažovat o ontologickém statusu čísla. Představitele prvního budeme nazývat *deskriptivními metafyziky*, představitele druhého *metafyziky revizionistickými*.[2] Deskriptivističtí metafyzikové důsledně vycházejí z matematické praxe a výsledky, k nimž dospívají, s touto praxí zpětně konfrontují. Pro revizionistické metafyziky není naopak matema-

1 Práce na tomto článku byla podpořena grantem GAČR 18-05838S.

2 Rozlišení mezi deskriptivní a revizionistickou metafyzikou pochází od Strawsona. Srov. Strawson, P. F.: *Individuá: Esej o deskriptivnej metafyzike*. Z *anglického originálu přeložil M. Zouhar*. Bratislava : Iris, 1997.
V našich úvahách o povaze deskriptivismu však vyjdeme z příbuzných úvah pozdního Wittgensteina a S. Shapira (srov. níže).

tická praxe závazná, a jejich závěry proto mnohdy duchu matematické praxe různým způsobem odporují.

Mezi rozhodné zastánce deskriptivismu patří M. Resnik a S. Shapiro, kteří mají za to, že důsledný deskriptivismus nakonec zákonitě ústí v tzv. *ante rem* strukturalismus. S tím však souvisí určitá obtíž. Kritici poukazují především na to, že existují kontexty, v nichž se s čísly (či jinými matematickými předměty) pracuje způsobem, který není ve shodě s deskriptivistickým východiskem.[3] Tato kritika pak může znamenat dvojí: Buď je nesprávný strukturalismus jako takový, nebo je nesprávné deskriptivistické východisko.

V našem příspěvku chceme nejprve připomenout argumenty, které oponenti strukturalismu užívají, a následně předložit řešení, které by bylo vůči uvedeným námitkám imunní. Budeme postupovat tak, že v první části vysvětlíme, v čem přesně spočívá deskriptivistické východisko a současně ukážeme, jak přivádí filosofy matematiky ke strukturalismu. Ve druhé a třetí části se budeme zabývat argumenty proti strukturalismu a zároveň ukážeme, jak se s nimi lze vyrovnat.

§1

Deskriptivismus – cesta ke strukturalismu

Chceme-li v krátkosti vymezit deskriptivistický přístup, bude užitečné obrátit pozornost k pozdnímu Wittgensteinovi. V jeho *Filozofických zkoumáních* totiž nalézáme krátký komentář k Augustinovým úvahám o čase, který budeme považovat za vzor toho, jak postupovat v rámci našich vlastních úvah o ontologickém statusu čísla.

Augustin, jak si povšimnul Wittgenstein, považuje problém *času* současně za jednoduchý i složitý. *Jestliže se* [jej totiž] *nikdo neptá*, [ví co je čas]; *jestliže* [by to měl] *dotazujícímu vysvětlit*, [neví].[4] Uvedený postřeh se samozřejmě netýká jenom problému času, ale lze jej s úspěchem použít i k objasnění jiných filosofických pojmů včetně pojmu čísla. Když se nás totiž nikdo neptá, všichni dobře víme, co čísla jsou, vždyť s nimi, podobně jako s časem dennodenně pracujeme. Když se nás ale někdo zeptá, cítíme podobné rozpaky jako v případě otázky, *co je čas*.

Jak se ale rozpaky nad uvedenými otázkami odstranit? Wittgenstein postupuje, alespoň zpočátku, podobně jako Platon, protože od nás chce, abychom se na cosi upamatovali. Oproti Platonovi však neobrací pozornost ke světu idejí ale na výpovědi, které o jevech příslušného druhu vyslovujeme. Jestliže uvažujeme o čase, musíme *se upamatovat na druh výpovědí, které lidé*

---

3 Tyto kontexty podrobně analyzuje především MacBride ve svém příspěvku: Structuralism reconsidered. In: S. Shapiro (ed.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford : OUP, 2005.

4 Wittgenstein, L.: *Filosofická zkoumání*. Přeložil Jiří Pechar. Praha : Filosofia, 1993, §89 – §90.

pronášejí o trvání událostí, o jejich minulosti, přítomnosti nebo budoucnost.[5] Jestliže nyní chceme uvažovat o číslech, pak se je třeba upamatovat na druh výpovědi, s nimiž se setkáváme v elementární aritmetice, tj. na běžné rovnice typu 7 + 5 = 12. V podstatě tímto Wittgensteinem naznačeným směrem se ubírá Resnik, když nás žádá, abychom ve filosofii matematiky nezohledňovali jiné výroky než ty, s nimiž se setkáváme v matematické praxi.[6] Poněkud zevrubněji, nicméně v témže duchu, se vyjadřuje S. Shapiro, když klade na filosofa matematiky dva požadavky. Podle prvního jsme vázáni tím, jak matematikové mluví a měli bychom jim proto bezvýhradně důvěřovat (faithfulness constraint). To znamená, že se musíme upamatovat výhradně na výroky, s nimiž se setkáváme v matematice. Druhý požadavek sehrává podle našeho soudu spíše kontrolní úlohu. Výsledky našich úvah by totiž neměly vést k závěru, podle nějž je třeba s matematickými předměty (např. čísly) spojovat jiné vlastnosti než ty, které s nimi spojuje samotný matematik (aritmetik). Neměly by tedy ústit v proměnu matematické praxe a být tak ve sporu s Shapirovým minimalism constraint.[7]

Po této metodologické úvaze se tedy již můžeme pokusit „upamatovat“ na výroky, s nimiž se setkáváme v elementární aritmetice. Co lze o nich říci? V prvé řadě je zřejmé (alespoň podle platónsky orientovaných filosofů tj. i *ante rem strukturalistů*), že matematikové pravdivost výroků tohoto typu neověřují zkušenostně, ale pomocí určité neempirické procedury. Dále se poukazuje na to, že uvedené výroky jsou rovnice, tj. výroky, které vyjadřují identitu. Jestliže jsou však rovnice identitami (mají formu $a=b$), pak jsou termíny na obou stranách rovnice singulární a nikoli obecné, tj. označují jednotlivý, ne však obecný předmět.

Výsledek těchto dvou na první pohled nenápadných postřehů je poměrně zásadní. Na základě nich totiž můžeme poměrně jednoduše odmítnout filosofii matematiky, s níž se setkáváme nejprve u Aristotela, později v poněkud jiné podobě u J. S. Milla. Oba myslitelé se totiž kloní k myšlence, podle níž je pravdivost aritmetických výroků nakonec zaručena zkušeností a dále mají za to, že číslovky nejsou singulární, ale obecné termíny. Bez velkého hloubání lze tedy Aristotela i Milla obvinit z toho, že dostatečně vážně neberou matematickou praxi a do svých závěrů neoprávněně promítají svá empiristická východiska. Tento revizionistický postoj je pak zvláště patrný u Milla, když nutnost a jistotu matematických pravd považuje za pouhou iluzi.[8]

Odmítnutí empirismu (Aristotela či Milla) může přirozeně vést k tomu, že zaujmeme určité platónské stanovisko. Čísla tedy budou existovat odděleně od empirického světa a budou to navíc jednotlivé předměty, k nimž referují singulární termíny (číslovky). Praxe matematiků však naznačuje, že takovýto přímočarý příklon k platonismu není bez obtíží. Ty vyjdou najevo, připomene-

5 Ibid. §90.
6 Resnik, M.: *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford : Clarendon Press, 1997, s. 92.
7 Shapiro, S.: Structure and Identity. In: *Identity and Modality*. MacBride, F. (ed.): Oxford : Oxford University Press, 2006, s. 110.
8 Srov. Mill, J. S.: *Systém logiky*, s. 43 – 51. Příslušnou část (sv. II, kap. 5, 7) přeložil Sousedík, S. In: Peregrin, J. – Sousedík, S. (eds.): *Co je analytický výrok*. Praha : Oikoymenh, 1995.

me-li charakteristiku tohoto proudu, jíž podal M. Resnik. Podle něj je tradiční platonik: *někdo, kdo má za to, že běžné fyzikální předměty a čísla lze „párovat". Čísla jsou věci stejného druhu – předměty – jako nafukovací míče, čísel je pouze více než míčů a jsou abstraktní a věčná.*[9]

Zdá se tedy, že fyzikální předmět (nafukovací míč) a číslo (sedmička) se liší jedině odlišným ontologickým statusem: první podléhá zkáze, druhý nikoli. Necháme-li však stranou tento ontologický rozdíl, pak se zdá, že stejného druhu by neměly být pouze fyzikální a matematické předměty, ale i výroky o těchto entitách. Tak tomu však bohužel není!

Podívejme se na nějaký příklad! Nafukovací míč se může nacházet v různých kontextech, tj. v různých vztazích: jednou je majetkem nějakého obchodníka, o něco později se stává majetkem mé dcery Kláry. Nejprve je tedy pravda, že míč patří nějakému obchodníkovi, později je pravda, že patří Kláře. Míč sám se však změnou těchto majetkových (ale i jiných) vztahů nemění, jedná se o tutéž věc, ať už patří obchodníkovi nebo Kláře. Přenášení čísel z jednoho kontextu do druhého je naproti tomu těžko myslitelné. Jestliže je pravda, že v určitém kontextu 7 > 5, 7 je následníkem 6 atd., pak si asi stěží vymyslíme kontext, v němž by toto neplatilo. O jednom o témže míči tedy mohu říci, že jednou je ve vztahu (vlastnictví) k nějakému obchodníkovi, podruhé je v tomtéž vztahu ke Kláře. Se sedmičkou však takto bezstarostně pracovat nemohu! Nelze tedy říkat, že jednou 7 > 5 podruhé dejme tomu 7 < 5. Sedmičku a nafukovací míč tedy není možné spárovat, a proto je tradiční platonismus z hlediska deskriptivistického přístupu nepřijatelný.

Tato jazyková úvaha – rozpomínali jsme se na výroky, které činíme o sedmičce a nafukovacím míči – má však i určité ontologické důsledky. Jestliže mohu nějaký předmět přenášet z jednoho vztahového kontextu do druhého, pak jeho identita musí být dána jeho vnitřní kompozicí. Tu pak mají především fyzikální předměty (nafukovací míč je gumový, barevný atd.). Jestliže naopak nějaký předmět z kontextu do kontextu přenášet nemohu, pak je jeho identita určena právě vztahy k ostatním předmětům. K takovýmto předmětům pak patří i čísla, a proto je jejich identita určena vztahy k ostatním číslům. Podle Resnika *v matematice ... nemáme předměty s 'vnitřní' kompozicí, které by byly dále uspořádány do struktur, ale máme pouze struktury. Předměty matematiky, tj. entity, které denotují naše matematické konstanty a kvantifikátory, jsou body bez další struktury či pozice ve struktuře. Jakožto pozice ve struktuře nemají identitu ani nějaké vlastnosti mi příslušnou strukturu.*[10] V podobném duchu se vyjadřuje i Shapiro. Podle něj je totiž esence přirozeného čísla určena *jeho vztahy k ostatním přirozeným číslům. Předmětem aritmetiky je samotná abstraktní struktura, tj. určitý vzor (the pattern) společný jakémukoli nekonečnému souboru předmětů, v němž platí vztah následnosti a který splňuje ... princip indukce.*[11]

---

9 Resnik, M.: *Frege and the Philosophy of Mathematics*. New York : Cornell University Press, 1980, s. 162.

10 Resnik, M.: Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. In: *Nous* 15, 1981, s. 530.

11 Shapiro, S.: *Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology*. Oxford : Oxford University Press, 1997, s. 72.

Tyto úvahy ve svých důsledcích vedou k tomu, že jsme s to přesně vymezit, čím se aritmetika (ale i ostatní matematické disciplíny) zabývá. Je totiž patrné, že nelze zkoumat nejprve jedno číslo, dejme tomu sedmičku, a později číslo jiné např. osmičku. Ten, kdo totiž neví, že osmička následuje po sedmičce, sedmičku vlastně ani nezná. Čísla je proto třeba zkoumat, tak říkajíc, najednou. Jejich celek pak vytváří určitou síť vztahů, jíž nazýváme strukturou.

§2
Problémy strukturalismu

Výše jsme uvedli, že strukturalismus vychází z *deskriptivismu, tj. matematickou praxi* nechce revidovat, ale pouze reflektovat. Kritikové nicméně poukazují na to, že strukturalistická koncepce s deskriptivismem nakonec ve sporu je. Upamatujeme-li se totiž na výroky, jež *činíme* o číslech, zjistíme, že některé z nich odporují tomu, že by jejich identita byla určena výhradně vzájemnými vztahy a jejich esence by díky tomu byla relační. Kritické námitky vůči strukturalismu rozdělíme do třech skupin: (a) S čísly mnohdy spojujeme akcidentální vlastnosti (*8 je významné číslo pro českou historii*). (b) S čísly spojujeme vlastnosti filosofické (*8 je abstraktní předmět*). (c) Matematikové identifikují předměty z různých struktur, tj. činí výroky typu $2_{nat}=2_{real}$.[12] V této části našeho výkladu (§2) se budeme zabývat problémy akcidentálních a filosofických vlastností čísel, v následujícím oddílu (§3) se soustředíme na problém výroků typu $2_{nat}=2_{real}$.

Zaměřme se nyní na výroky, v nichž se s čísly spojují akcidentální vlastnosti. Může se jednat o empirické vlastnosti, např. 8 má vlastnost *být důležitá pro české dějiny*, nebo o vlastnosti neempirické, např. 2 má vlastnost *být počtem řešení rovnice* $x^2 = 4$. Přijmeme-li deskriptivistické východisko, pak bychom buď do povahy čísla měli zahrnovat i tyto vlastnosti, nebo stanovit kritérium, pomocí nějž by se rozhodlo, které vlastnosti k povaze čísla patří a které nikoli. První alternativa se zdá být nepřijatelná. Klademe-li si otázku, co je osmička, tj. jaká je esence (definice) tohoto čísla, pak při hledání odpovědi můžeme zřejmě nechat stranou to, že je důležitá pro české dějiny. Podobně je tomu i v druhém případě. I zde se zdá, že k esenci 2 nepatří vztah k počtu řešení rovnice $x^2 = 4$. Chceme-li tedy vědět, co je číslo, musíme vzít v potaz pouze jeho esenciální vlastnosti a stranou nechat vlastnosti akcidentální.

Jak však rozlišit mezi esenciálními a akcidentálními vlastnostmi čísel? Jak poznáme, že vlastnost *být větší než sedm* je pro osmičku esenciální, zatímco vlastnost *být důležitá pro české dějiny* je čímsi akcidentálním? Snad bychom mohli navrhnout, že esenciální vlastnosti jsou pro čísla nutné, akcidentální vlastnosti naproti tomu nahodilé. Toto kriterium lze však úspěšně aplikovat

12 Problém automorfismu, který bývá v této souvislosti rovněž zmiňován, necháváme v kontextu našeho výkladu stranou.

pouze v případě empirických vlastností, v případě neempirických vlastností selhává. To, že 2 má vlastnost *být počtem řešení rovnice* $x^2 = 4$, je pro ni nutné, a přesto je tato vlastnost pro dvojku akcidentální. Musíme se tedy pokusit najít kritérium jiné.

Jak bychom si však přitom měli počínat? Asi bychom měli nějakým způsobem předem vědět, co k esenci čísla patří a co nikoli. Jsme-li strukturalisté, pak víme, že esence přirozeného čísla je dána jeho vztahy k jiným přirozeným číslům. Ani vztah k dějinám, ani vztah k počtu řešení nějaké rovnice tento požadavek nesplňují, a jsou to proto akcidentální vlastnosti. Problém tohoto řešení je však zřejmý – točíme se v kruhu. Abychom rozlišili mezi esenciálními a akcidentálními vlastnostmi, musíme předem vědět, co tyto vlastnosti jsou.

Jak se tedy vyhnout tomu, abychom neupadli do bludného kruhu? Podle našeho soudu se je třeba vrátit na začátek našich úvah o deskriptivismu a připomenout, že esenci (definici) čísla známe stejně tak dobře jako esenci času, tj. nikoli explicitně (když se někdo zeptá), ale pouze implicitně (když se nás nikdo neptá). K tomu, abychom byli s to dát explicitní odpověď na otázku, co je číslo, respektive čas, se musíme právě rozpomenout na naše implicitní znalosti, tj. na výroky, v nichž se hovoří o číslech respektive o časových údajích. Nutnou podmínkou úspěšnosti takovéhoto kroku pak nepochybně je, že příslušné výroky vytvořil kompetentní mluvčí. V případě „času" je kompetentní každý dospělý mluvčí, v případě čísla je celá záležitost poněkud komplikovanější. Každý sice čísla velice často používá, nicméně znalosti tohoto užití nesál tak říkajíc s mateřským mlékem (tak jako v případě času), ale nabyl je ve škole při výuce aritmetiky. Zdá se tedy, že kompetentním mluvčím v případě pojmu čísla je až aritmetik, když mluví jako aritmetik. Právě na jeho výroky se tedy musíme upamatovat, když si, co by filosofové, klademe otázku, co je číslo.

Tím však již máme připravenou půdu k tomu, abychom reagovali na první námitku. Ohledně výroků (a), které měly zpochybnit strukturalistickou definici čísla, je třeba konstatovat jediné: aritmetik jakožto aritmetik by je nikdy vážně nepronesl, v učebnicích tohoto oboru jistě nikdy nenalezneme výroky typu *8 je důležitá pro české dějiny*. Nejsou to proto vlastnosti esenciální, ale akcidentální.

Pojďme se nyní zamyslet nad námitkou (b), která poukazuje na to, že číslům přisuzujeme filosofické vlastnosti, např. *být abstraktní*, *mít relační povahu* atd. I tyto výpovědi odporují strukturalistické definici čísla. To, že je 8 abstraktní, je pro ni v určitém smyslu esenciální, nicméně *být abstraktní* není relační vlastnost. Esence čísla by tedy nebyla určena vzájemnými vztahy, ale vnitřní kompozicí, k níž by patřila právě vlastnost *být abstraktní*. Tento problém lze vyřešit obdobně jako v předcházející. Tehdy jsme však rozlišovali mezi esenciálními a akcidentálními vlastnostmi čísla, nyní mezi vlastnostmi matematickými (tj. esenciálními v dřívějším slova smyslu) a filosofickými. Matematickou vlastností 8 je tedy např., *že je větší než 7*, její filosofickou vlastností, že je to dejme tomu abstraktní předmět. Vlastní rozlišení pak lze v principu uskutečnit opět jako v předcházejícím případě – rozpomeneme se na výroky, které činí kompetentní mluvčí. Na jedné straně nyní máme opět aritmetika, na straně druhé však filosofa. Namítá-li tedy někdo, že vlastnost *být abstraktní* není relační, pak mu odpovíme, že tato vlastnost není matematická, ale filosofická.

Obtíž navrženého řešení spočívá v tom, že rozlišení mezi aritmetickými a filosofickými výroky je obtížnější než rozlišení mezi výroky v předcházejícím případě. V aritmetických pojednáních se totiž jistě nenacházejí výroky typu *8 je důležitá pro české dějiny*, nicméně na výroky typu *8 je abstraktní předmět* přeci jenom tu a tam narazíme. Problém spočívá v tom, *že* výroky tohoto typu matematikové nejsou mnohdy s to identifikovat a oddělit je následně od výroků čistě matematických. Abychom tedy s jistotou rozlišili matematické a filosofické vlastnosti, museli bychom najít ideálního matematika, popř. ideálního filosofa, kte*ří* by do svého diskursu nepřimíchali nic filosofického, resp. matematického.[13]

Je zřejmé, že ideálního matematika ani filosofa nenajdeme a musíme si proto řešení našeho problému nějakým způsobem zjednodušit. Náš návrh spočívá v tom, že si vybereme z matematiky nějakou její dobře zavedenou část, o níž nejsou pochybnosti. Dobrý aritmetik bezpečně operuje s čísly, určuje neomylně jejich vlastnosti a svoji praxi, necháme-li stranou úvodní části jeho výkladu, problematickými filosofickými výroky nezatěžuje.

Samozřejmě, že bychom mohli namítnout, že stále chybí přesné kritérium, pomocí něhož bychom odlišili výroky filosofie matematiky od matematiky samotné. Možná by nás samotný matematik přesvědčoval o tom, že výroky typu *8 je abstraktní předmět* samozřejmě do jeho matematické praxe náleží. Jakožto filosofové bychom ho snad začali přesvědčovat o tom, že výroky uvedeného typu patří do hájemství filosofie a argumentovali bychom tím, že ve filosofii jsme kompetentní mluvčí my a ne on. Takto vedená diskuse samozřejmě může skončit neúspěchem, když se obě strany opevní na svých pozicích. Mnohdy však filosof matematika může určitým způsobem ovlivnit a zpřesnit způsob jeho vyjadřování. Matematik, dejme tomu, uzná, že výrok *číslo je abstraktní předmět* nepatří do matematiky, ale do filosofie, a tak „obtěžuje" čtenáře výroky tohoto druhu pouze v úvodní kapitole své knihy.

Takováto argumentace nás může vést k závěru, že by mezi matematiky a filosofy mohl být velice plodný vztah. Filosof by měl „dohlížet" na výroky, jež činí matematikové a upozorňovat je na to, že do jejich oboru proniklo cosi cizorodého. Tím by samozřejmě nejenom zprůzračnil způsob jejich vyjadřování, ale současně by napomohl i k rozvoji jejich disciplíny.[14] Tato úvaha o vztahu mezi filosofií matematiky a matematikou vypadá na první pohled velice přirozeně.

---

13 Narážíme zde tedy na problém vztahu mezi filosofií matematiky a matematikou. Ten má pak podle našeho soudu řadu obdobných rysů jako dřívější a slavnější problém vztahu mezi filosofií a teologií.

14 Doklad toho, že takovýto vztah je možný, lze nalézt v dějinách fyziky. Do této disciplíny totiž proniklo metafyzické substanciální pojetí prostoru. Fyzikové tedy mluvili tak, jakoby prostor (ale i čas) byl absolutní, tj. zcela nezávislý na světě kolem nás. E. Mach poukázal na to, že do fyziky takto proniklo cosi metafyzického a že se díky této konfúzi fyzika nemůže patřičně rozvíjet. Je obecně známo, že právě toto jeho upozornění je jedním z důležitých kroků směrem k teorii relativity. Srov. Mach, E.: *Space and Geometry in the Light of Physiological, Psychological and Physical Inquiry*. Trans. by T. J. McCormack. Open Court : La Salle, 1960, kap. 5.

Je s ní však, alespoň z pohledu strukturalismu, spojena určitá obtíž. Přijmeme-li totiž, že filosof určitým způsobem ovlivňuje matematickou mluvu, pak tím do jisté míry zpochybníme deskriptivistické východisko strukturalismu. Zdá se totiž, že filosof může za určitých okolností matematickou praxi revidovat. To by však explicitně odporovalo prvnímu Shapirovu požadavku, podle nějž je matematická mluva důvěryhodná (faithfulness constraint).

Již nyní můžeme naznačit, že uvedená úvaha vede k určitému oslabení důvěry v matematikovu mluvu (faithfulness constraint). Filosof podle našeho soudu není za všech okolností matematickou mluvou vázán. To, že je naše mínění oprávněné, se pokusíme prokázat v dalším paragrafu.

§3
Identita napříč různými strukturami

Další problém, který vrhá stín pochybností na deskriptivistické východisko strukturalismu, se týká identity (či obecněji vztahu) mezi předměty různých matematických struktur. Pochybnosti totiž vyvolávají výroky typu $2_{nat}=2_{real}$. Abychom porozuměli, v čem problematika takovýchto výroků spočívá, je třeba připomenout, že v matematice *nemáme předměty s 'vnitřní' kompozicí, které by byly dále uspořádány do struktur, ale máme pouze struktury.*[15] Jestliže ovšem předměty matematiky nemají vnitřní strukturu, pak mimo danou strukturu nemají žádnou identitu ani nějaké vlastnosti. V matematice však pracujeme s větším počtem vzájemně odlišných struktur: rozlišujeme např. strukturu čísel přirozených, racionálních, reálných atd. Tyto různé struktury pak mnohdy vzájemně porovnáváme či jednu vnořujeme (*embedding*) do druhé. Při této příležitosti matematikové často identifikují předmět jedné struktury s předmětem struktury jiné a činí výroky typu $2_{nat}=2_{real}$. To by však nemělo být možné, protože matematické předměty nemají identitu ani nějaké vlastnosti mimo danou strukturu. Pravdivostní hodnotu totiž můžeme spojovat s výrokem $7+5=12$, protože výrazy $7+5$ a 12 označují předměty téže struktury, nikoli však s výrokem $2_{nat}=2_{real}$, protože výrazy 2_{nat} a 2_{real} označují předměty dvou různých struktur. Strukturalistická koncepce tedy vede k tomu, že nelze identifikovat předměty jedné struktury s předměty struktury odlišné. Matematikové přesto identitní výroky napříč různými strukturami činí.

Na první pohled vypadá uvedený argument jako „šach mat". Jestliže totiž výroky typu $2_{nat}=2_{real}$ matematik skutečně činí, pak bychom je ve shodě s deskriptivismem neměli zpochybňovat a měli bychom připustit, že předměty matematiky mají identitu či nějaké vlastnosti mimo danou strukturu. Tím však zpochybníme základní myšlenku strukturalismu, podle níž mají matematické předměty čistě relační povahu, a v důsledku toho nemají identitu či vlastnosti mimo příslušnou strukturu. Jestliže naopak matematiky upozorníme na to, že

15 Resnik, M.: Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. In: *Nous* 15, 1981, 530.

výroky uvedeného typu nemají smysl či pravdivostní hodnotu, a proto je nemají činit, zpochybníme tím naše deskriptivistické východisko, a tím i výsledky, k nimž jsme dospěli.

Jakou cestou bychom se měli za těchto okolností vydat? Zdá se nám, že strukturalista nemá jinou možnost než oslabit – podobně jako v předcházejících úvahách (srov. §2) – deskriptivismus a připustit určitý vliv filosofie na způsob, jímž se matematikové vyjadřují. Přesněji řečeno, je třeba oslabit Shapirův faithfulness constraint, naopak jeho minimalism constraint je nezbytné podržet v platnosti. Další výklad rozdělíme do dvou myšlenkových částí. V první se podrobněji zaměříme na výroky typu $2_{nat}=2_{real}$; v druhé se jako filosofové pokusíme naznačit, jak by matematikové měli chápat ono vnořování jedné struktury do druhé, tj. předložíme určitý návrh revize matematické řeči.

Na první pohled se zdá, že výroky typu $2_{nat}=2_{real}$ nejsou nesmyslné. Mělo by být totiž vždy v principu rozhodnutelné, zda je nějaký předmět totožný s libovolným předmětem jiným. Do identity formy a=b si tedy můžeme za *a* i *b* dosadit libovolné předměty a vzniklý výrok bude pravdivý či nepravdivý. Tak nahlížel na celou záležitost i Frege, podle nějž musí mít a=b smysl i tehdy, když si za *a* dosadíme Césara, za *b* 2 (*César=2*). Tím se dostáváme ke známému *Césarovu problému*, jehož řešení je podle našeho soudu i klíčem ke správnému pochopení problému identity napříč různými strukturami.

Frege se domníval, že čísla jsou jednotliviny, které patří do univerza tvořeného vším, *co je a je pevné*.[16] Je-li tento předpoklad (existence jednoho univerza) správný, pak samozřejmě musíme být s to vždy rozhodnout, zda je výrok formy *a=b* pravdivý či nikoli. Musíme tedy mít k dispozici kritérium, jehož aplikací určíme nejenom pravdivostní hodnotu výroků typu *César=2*, ale i typu $2_{nat}=2_{real}$. Ze sémantického hlediska mají totiž oba výroky stejnou povahu, jako např. výrok 7+5=12. Jak však matematik rozhodne, zda je výrok *César=2* pravdivý? Výrok 7+5=12 verifikujeme běžnou aritmetickou procedurou, chceme-li však posoudit, zda je pravda César=2 či $2_{nat}=2_{real}$, pak nám metoda verifikace chybí a řídíme se pouhou intuicí.

Abychom dokázali uvedené výroky verifikovat, musíme podle Frega předložit definici čísla. Tu se náš autor pokusil podat dvěma podstatně odlišnými, byť vzájemně souvisejícími způsoby. Nejprve hledal kritérium identity čísel. V duchu deskriptivismu se upamatoval na tzv. *číselné údaje*, tj. výroky typu *počet měsíců Jupitera=4*. Reflexí nad číselnými údaji dospěl k závěru, že za kritérium identity je třeba považovat stejnopočetnost. Užití tohoto kritéria se však výroky typu César=2 vzpíraly. Svůj dosavadní myšlenkový postup proto přehodnotil a dospěl k závěru, že je číslo třeba ztotožnit s určitým druhem extenze (třídou stenopočetných tříd).[17] Tím ovšem již dokážeme určit pravdivostní hodnotu výroku César=2. Jestliže totiž umíme odpovědět na otázku, co je číslo, pak i chápeme, že dvojka není César. Číslo 2 má, použijeme-li strukturalistickou

16 Heijenoort, J. van: Logic as Calculus and Logic nad Language. In: *Synthese* 17, 1967, s. 327.

17 Podrobnější výklad o Fregově pokusu definovat číslo nalezne čtenář ve článku: Sousedík, P. – Svoboda, D.: Fregovo pojetí aplikace matematiky. In: *Filosofický časopis – mimořádné číslo* 3, 2015, s. 101 – 124.

terminologii, jinou vnitřní kompozici než César. Tímto myšlenkovým krokem se Frege přiblížil k tradičnímu platonismu. Dvojku i Césara lze totiž spárovat, protože oba předměty mají nějakou vnitřní kompozici. Jestliže však lze dvojku a Césara spárovat, pak má otázka, zda je César dvojka či nikoli, smysl.

Z našeho hlediska si je třeba uvědomit, že Frege postupoval po určité stránce obdobně jako strukturalisté. On i oni v podstatě vycházeli z deskriptivistického východiska, tj. upamatovali se na výroky určitého druhu. Před Fregovými či strukturalistickými úvahami jsme totiž věděli, co je číslo, jenom implicitně, tj. když se nás nikdo neptal, po nich máme odpověď explicitní, tj. dokážeme reagovat, když se nás někdo zeptá. Fregova i strukturalistická odpověď na otázku „Co je číslo?", je proto v Augustinově smyslu filosofická. Jestliže tedy řekneme, že číslo je svého druhu třída nebo čistě relační předmět, nemluvíme jako matematikové, ale jako filosofové, s číslem jsme tedy nespojili nějakou vlastnost matematickou, ale filosofickou.[18]

Zde však podobnost mezi Fregovým logicismem a strukturalismem končí. Logicistická odpověď na otázku, co je číslo, totiž nebyla dobrá pouze pro řešení Césarova problému, ale cítili se jí být inspirováni i teoretikové, kteří hledali základy matematiky. Když se totiž zjistilo, že v podstatě každou oblast matematiky lze redukovat na teorii množin, stala se množinově – teoretická hierarchie ontologií veškeré matematiky. Fregova filosofie tedy vedla ke zjištění, že matematice nakonec vždy pracujeme s jedním druhem předmětů a teorie množina se tak stala zakládající disciplínou této disciplíny.

S touto redukcí je však spojena, jak si povšimnul P. Benacerraf, závažná obtíž.[19] Existuje totiž několik vzájemně odlišných identifikací čísel s množinami: podle von Neumanna např. platí $2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, podle Zermela $2=\{\{\emptyset\}\}$. Jedním z důsledků von Neumanovy identifikace je, že $2\in 4$, naopak důsledkem Zermelovy $2\notin 4$. Jestliže však uvedené definice vedou k vzájemně kontradiktorickým výsledkům, měli bychom být s to rozhodnout, která z definic je správná a která nikoli. Takovéto rozhodnutí však učinit nelze, a ztotožnit čísla s množinami tedy není podle Benacerrafa možné.

Úvahy tohoto druhu lze navíc zobecnit. Nepřijatelná totiž není pouze identifikace čísla s množinově teoretickým předmětem, ale i s předmětem libovolným. Ztotožníme-li totiž číslo s nějakým předmětem, obohatí se tím jeho vlastnosti. To však vede k týmž problematickým důsledkům, jako v případě ztotožnění čísla s množinou. Opět lze totiž číslo ztotožnit s předměty, které mají vzájemně kontradiktorické vlastnosti, a opět nelze rozhodnout, které ztotožnění je adekvátní. Benacerraf se proto domnívá, že čísla nejsou předměty a výroky typu $2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ či César $=2$ jsou díky tomu nesmyslné.

Benacerrafovi bychom mohli vytknout, že argumentuje jako tradiční platonikové, podle nichž lze běžné fyzikální předměty a čísla spárovat. Nerozlišil

18 Uvedené srovnání vede přirozeně k otázce, proč filosofická definice čísla, s níž přichází Frege, se tak zásadně odlišuje od definice, s níž později přicházejí strukturalisté. Odpověď je podle našeho soudu dána tím, že Frege vycházel *z číselných údajů, zatímco strukturalisté z výroků čisté aritmetiky*.

19 Srov. Benacerraf, P.: What numbers could not be. In: *Philosophical Review* 74, 1965, s. 47 – 73.

tedy mezi předměty, které mají vnitřní strukturu a předměty, jejichž esence je určena výhradně relačně. Nepodařilo se mu proto prokázat, že čísla nejsou předměty, ale to, že čísla nejsou předměty s vnitřní kompozicí. To je však pro strukturalisty dobrá zpráva! Vždyť podle nich, jak již víme, v matematice s takovýmito předměty vůbec nepracujeme. Výroky typu 2={Ø,{Ø}} či César =2 jsou podle nich sice nadále nesmyslné, nikoli však kvůli tomu, že by čísla nebyly předměty, ale kvůli tomu, že jsou předměty *čistě relační, které identitu mimo danou strukturu prostě nemají.*[20] Výrok *César=2* je tedy nesmyslný nikoli proto, že by dvojka nebyla předmětem (jak se domníval Benacerraf), ale kvůli tomu, že toto číslo patří do úplně jiné kategorie než César. Dvojka nemá vnitřní kompozici César ano, a proto tyto předměty nelze párovat.

Logickým důsledkem strukturalismu je tedy neporovnatelnost přirozených čísel s předměty vnějšího světa. Je-li však mezi čísly a předměty vnějšího světa nepřekonatelná propast, je třeba opustit Fregův předpoklad jednoho univerza a připustit jejich mnohost. To by mohl nakonec uznat i sám Benacerraf, podle nějž *identitní výroky mají smysl jedině v takovém kontextu, v němž existují možné individuační podmínky. … Otázky identity v sobě zahrnují presupozici, že zkoumané entity náleží do stejné obecné kategorie.*[21]

To, že existuje více vzájemně neporovnatelných univerz, lze potvrdit i aplikací deskriptivistického východiska. Podobně jako matematik neplete do aritmetiky výroky o důležitosti osmičky pro české dějiny (srov. §2), tak ji neinfikuje výroky o identitě Césara a dvojky. V učebnicích aritmetiky přece nenacházíme výroky typu *César=2* ani typu *2={Ø,{Ø}}*. Důvodem je, že identifikované předměty patří do různých kategorií či struktur.[22]

Po těchto úvahách se již můžeme zaměřit na výroky typu $2_{nat}=2_{real}$. Zdá se totiž, že by mohly být stejného druhu jako výroky *César=2* či *2={Ø,{Ø}}*. Přirozená čísla by totiž mohla patřit do jiné kategorie než čísla reálná, a tak by měly být výroky tohoto druhu ze stejných důvodů opět nesmyslné. Tento závěr bychom měli potvrdit (podobně jako výše) i důslednou aplikací deskriptivismu. Již jsme nicméně poukázali na to, že právě zde se dostáváme do nepříjemného konfliktu. Matematikové sice neříkají *César=2*, ale někdy *je pro ně výhodné*

---

20 Srov. Resnik, M.: Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. In: *Nous* 15, 1981, s. 530.

21 Benacerraf, 1965, §III.A. Podobně se vyjadřuje i Strawson. podle nějž *Otázka pochybnosti o totožnosti věci z jednoho systému s věcí z jiného systému … má smysl jen tehdy, jestliže oba systémy nejsou nezávislé, tedy jestliže jsou nějak propojenými částmi jednoho systému, který je oba zahrnuje. Takovýto systém však máme právě tehdy, když některé věci z jednoho podsystému splňují kritéria identity alespoň s některými věcmi z druhého podsystému.* Strawson, P. F.: *Individuá: Esej o deskriptivnej metafyzike*. Z *anglického originálu preložil M. Zouhar*. Bratislava : Iris, 1997, s. 63.

22 Samozřejmě, že identita čísel s množinami je případ poněkud problematičtější než identita čísel s velkými osobnostmi dějin. S prvními se v matematických textech rozhodně nesetkáváme, s druhými někdy ano. Do matematické praxe však pronikly identity druhého druhu, jak jsme se pokusili prokázat výše, až díky Fregově pokusu o definici čísla. Tento **filosofický** pokus ovlivnil následně matematickou praxi, v níž jsme si začali spojovat s čísly nové vlastnosti. Je samozřejmě opět především na filosofech, aby prokázali, že jejich definice čísel nemá v matematické praxi žádné skutečné místo. Jasně odporuje Shapirovu minimalism constraint, protože s čísly spojuje nové, množinově – teoretické vlastnosti.

či dokonce nutné identifikovat místa v různých strukturách.[23] Výroky typu $2_{nat}=2_{real}$ tedy říkají.

Resnikovy i Shapirovy pokusy vypořádat se s tímto problémem nepovažujeme za úspěšné,[24] a proto předkládáme návrh vlastního řešení. Vyjdeme přitom z předpokladu, podle nějž jsou výroky $2_{nat}=2_{real}$, ale i $2_{nat}\neq2_{real}$ nesmyslné. Jinými slovy 2_{nat} a 2_{real} nelze podle našeho soudu spárovat. Používají-li přesto matematikové tyto výroky, pak mluví nekonzistentně. Jestliže totiž pracují s číslem v aritmetice, pak jej pojímají jako čistě relační předmět, který nemá vnitřní kompozici; jestliže naopak činí výroky typu $2_{nat}=2_{real}$, pak číslo pojímají jako předmět, který vnitřní kompozici má. Za těchto okolností se je třeba pokusit porozumět, co přesně výroky uvedeného typu myšleno, a následně předložit návrh formy vyjádření, která by nahradila výroky typu $2_{nat}=2_{real}$ a stala se tak adekvátním vyjádřením vnoření jedné struktury do druhé.

V našich úvahách vyjdeme ze zjištění, podle nějž jsou výroky $2_{nat}=2_{real}$ stejného druhu jako výroky *César=2* či $2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$. Jsou tedy všechny nesmyslné, a to ze stejných důvodů: ztotožňují se v nich totiž předměty, patřící do různých generálních kategorií. Problémem je – a to zvláště z hlediska deskriptivismu –, že tyto „nesmysly" přesto v komunikaci občas slýcháváme. Mluvčí tedy má cosi na mysli, nicméně forma, pomocí níž svoji myšlenku vyjadřuje, není adekvátní. Pokusíme se proto nyní o rekonstrukci toho, co mluvčí poněkud zavádějícím způsobem vyjadřuje. Budeme postupovat tak, že se nejprve zamyslíme nad výroky typu *César=2*, které podle našeho soudu představují nejméně zajímavý, ale současně i nejméně obtížný případ. Tím získáme klíč k tajemství výroků $2_{nat}=2_{real}$.

Ohledně výroku *César=2* je třeba znovu konstatovat, že by je kompetentní mluvčí nikdy vážně nevyslovil. Kdybychom je přesto zaslechli, jistě bychom usoudili, že je vyřknul někdo, kdo se jazyku teprve učí, např. dítě či cizinec. Zaujmeme-li vůči mluvčímu vstřícný postoj, budeme přemýšlet o tom, co měl na mysli. Mohlo by nás jistě napadnout, že se vlastně jedná o odpověď na otázku: *Kolik je Césarů?* Tato otázka je však podobně jako odpověď *Césarů je dva* opět nesprávně formulovaná. Vždyť César je pouze jeden! To je ovšem pravda, nicméně nositelů tohoto jména může být přesto více. Náš nekompetentní mluvčí tedy zřejmě reaguje na otázku: *Kolik je nositelů jména „César"?* a adekvátní odpověď by měla znít: *Počet nositelů jména „César" je 2*. K jakému závěru jsme tedy dospěli? Náš nekompetentní mluvčí vyjádřil svoji myšlenku nevhodným způsobem, protože použil identitní výrok, jehož forma je $a=b$. Na místo toho měl použít výrok, jehož forma je $početF(x)=b$. Ve skutečnosti se tedy jedná o skrytý (Fregův) číselný údaj. Ve výrocích tohoto typu

23 Shapiro, S.: *Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology*. Oxford : Oxford University Press, 1997, s. 81.

24 Resnikovy i Shapirovy pokusy vedou podle našeho soudu k závěrům, které jsou s *ante rem* strukturalismem neslučitelné. Resnikův pokus a první pokus Shapirův přinejmenším svádějí k idealistické interpretaci, druhý pokus Shapirův vede k závěru, podle nějž existuje pouze jedno univerzum ve Fregově slova smyslu. Inspirativní a současně poněkud problematické na těchto pokusech je podle našeho názoru to, že vedou k revizi matematické mluvy. Porušují tedy zásadu důvěryhodnosti matematického diskursu.

se neidentifikují dva předměty, ale pomocí dvou výrazů referujeme k jednomu a témuž abstraktnímu předmětu. Jméno *César* proto je třeba interpretovat jako deskripci, která referuje k číslu dvě. Číslo se tak – fregovsky řečeno – stalo vlastností (sortálního) pojmu (*být nositelem jména „César"*), pomocí nějž popisujeme vnější svět.

Obdobně nyní přistoupíme k matematikovi, který říká $2_{nat}=2_{real}$. Opět totiž slyšíme výrok, který by kompetentní mluvčí neměl říkat. Tentokráte však před sebou nemáme ani dítě, ani cizince. Případ je přesto analogický! Výše jsme totiž rozlišili mezi matematickou praxí, která je dobře zavedená a tou, která není. Výrokem $2_{nat}=2_{real}$ tedy náš mluvčí zřejmě opustil první oblast a vstoupil do druhé. Stalo se z něj, tak říkajíc, matematick*é* dítě či cizinec. Buďme však k němu opět vstřícní a zamysleme se nad tím, co měl mluvčí na mysli tentokrát!

Vyjdeme přitom z předpokladu, že ze sémantického hlediska jsou výroky *César=2* a $2_{real}=2_{nat}$ stejné. Jestliže jsme pro případ výroku *César=2* ukázali, že se jedná o skrytý číselný údaj a že výraz *César* je vlastně skrytá deskripce čísla 2, pak bychom v podstatě totéž měli prokázat pro případ výroku $2_{real}=2_{nat}$.. Uvedený výrok je tedy opět skrytý číselný údaj, přičemž termín 2_{real} není číslovka, ale skrytá deskripce, která referuje k 2_{nat}. Číslo 2_{nat} se tak stává vlastností sortálního pojmu, jímž však nepopisujeme vnější svět, ale svět (strukturu) reálných čísel. Díky tomu mají výroky typu $2_{real}=2_{nat}$ ve skutečnosti formu *počet F(x)=n*. V dalším bádání by bylo třeba určit povahu sortálního pojmu *F(x)*. Tyto úvahy bohužel přesahují rozsah našeho příspěvku. Z našeho hlediska stačí konstatovat, že výroky typu *César=2*, *2={Ø,{Ø}}*, $2_{real}=2_{nat}$ atd. nejsou v pravém slova smyslu identitami formy *a=b*, ale jedná se o číselné údaje formy *počet F(x)=n*. Ve všech případech tak v podstatě dochází k aplikaci aritmetiky na příslušnou oblast. V případě výroku *César=2* na empirický svět, v případě výroku *2={Ø,{Ø}}* na teorii množin a konečně v případě výroku $2_{real}=2_{nat}$ na strukturu reálných čísel.

Závěr

Problémy, na něž jsme v průběhu našich úvah narazili, lze tedy podle našeho soudu vyřešit jedině tak, že budeme poněkud modifikovat deskriptivismus, který jsme s *ante rem* strukturalismem původně spojili. Matematikova řeč tedy není vždy a za všech okolností zcela důvěryhodná. Někdy dochází k tomu, že do jeho řeči neoprávněně pronikají filosofické koncepty, jindy se zas vyjadřuje poněkud nekonzistentně. Máme za to, že jeden z úkolů filosofa matematiky spočívá v tom, že na tyto nedostatky poukazuje a tím pomáhá zpřesňovat matematický způsob vyjadřování. Tuto úlohu filosofie matematiky dokládají i dřívější dějiny této disciplíny. Známý je v tomto ohledu především Berkeleyho spis *Analytik*, v němž si autor povšimnul, že infinitezimální počet je formulován nepřesným a k rozporům vedoucím jazykem.[25] Tento jeho poukaz

25 Srov. Berkeley, G.: *Analytik*. Přeložil M. Tomeček. In: Kolman, V. – Roreitner, R. (eds.): *O špatném nekonečnu*. Praha : Filosofia, 2014, s. 101 – 148.

následně vedl ke snaze nepřesný způsob vyjádření vylepšit, vedl k procesu, jejž nazýváme *rigorizace infinitezimálního počtu*[26].

Tyto myšlenky pak poukazují na významný rozdíl mezi filosofií matematiky a filosofií v běžném slova smyslu. Upamatujeme-li se spolu s Wittgensteinem, na výroky, jež činíme o čase, pak si musíme uvědomit, že přirozený jazyk *patří k našemu přírodopisu právě tak jako chodit, jíst, pít, hrát*.[27] Patří-li však běžná mluva k našemu přírodopisu stejně jako chůze atd., pak je v běžné filosofii třeba dát za pravdu Shapirovu požadavku důvěryhodnosti (faithfulness constraint) a neiniciovat jakoukoli opravu naší přirozené mluvy. V běžné filosofii bychom se tedy měli důsledně přihlásit deskriptivismu a odmítnut jakoukoli podobu revisionismu. Filosof matematiky však je, jak jsme viděli, v trochu jiné situaci. Matematika totiž chce být exaktní, nicméně v některých oblastech tohoto cíle nedosahuje. Jeden z úkolů filosofa matematiky pak spočívá v tom, že chce napomoci vyjadřování matematiky zpřesnit. Filosof matematiky je tak vázán Shapirovým faithfulness constraint jenom v případě dobře zavedené praxe, v případě praxe, která ještě dobře zavedená není, může být jeho role i aktivní. Tento postoj k filosofii matematiky bychom proto mohli pracovně nazvat *semideskriptivismus*.[28]

Použitá literatura

Benacerraf, P.: What Numbers Could not Be. In: *Philosophical Review* 74, 1965, s. 47 – 73. Reprinted in: Benacerraf and Putnam (ed.): *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* Cambridge : Cambridge University Press, 1984, s. 403 – 420.

Berkeley, G.: *Analytik*. Přeložil M. Tomeček. In: Kolman V. – Roreitner R. (eds.): *O špatném nekonečnu*. Praha : Filosofia, 2014, s. 101 – 148.

Heijenoort, J. van: Logic as Calculus and Logic as Language. In: *Synthese* 17, 1967, s. 324 – 330.

Hellman, G.: Review of Shapiro. In: *Journal of Symbolic Logic* 64, 1999, s. 923 – 926.

Hellman, G.: Three Varieties of Mathematical Structuralism. In: *Philosophia Mathematica* 9/3, 2001, s. 184 – 211.

Kreisel, G.: Informal Rigour and Completeness Proofs. In: I. Lakatos (ed.): *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam, North-Holland, 1967, s. 138 – 186.

Mach, E.: *Space and Geometry in the Light of Physiological, Psychological and Physical Inquiry*. Trans. by T. J. McCormack. Open Court : La Salle, 1960.

---

26 Srov. Sousedík, P.: *Rigorizace infinitezimálního počtu a obrat k jazyku (Kant – Bolzano – Frege)*. In: *Organon F* 13, č. 1, 2001, s. 32 – 54.

27 Wittgenstein, L.: *Filosofická zkoumání*. Přeložil Jiří Pechar. Praha : Filosofia, 1998, §25.

28 Dodejme, že v podobném duchu uvažuje o filosofii exaktních věd Schlick ve stati *Budoucnost filosofie*. Přeložil Sousedík, P. In: *Organon F*, 2002, s. 406 – 418.

MacBride, F.: Structuralism reconsidered. In: S. Shapiro (ed.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford : OUP, 2005.
Mill, J. S.: *Systém logiky*, s. 43 – 51. Příslušnou část (sv. II, kap. 5,7) přeložil Sousedík, S. In: Peregrin, J. – Sousedík, S. (eds.): *Co je analytický výrok*. Praha : Oikoymenh, 1995.
Resnik, M.: *Frege and the Philosophy of Mathematics*. New York : Cornell University Press, 1980.
Resnik, M.: Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. In: *Nous* 15, 1981, s. 529 – 550.
Resnik, M.: *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford : Clarendon Press, 1997.
Shapiro, S.: *Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology*. Oxford : Oxford University Press, 1997.
Shapiro, S.: Structure and Identity. In: MacBride, F. (ed.): *Identity and Modality*. Oxford : Oxford University Press, 2006, s. 109 – 145.
Shapiro, S.: Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and –i. In: *Philosophia Mathematica* III, 15, 2007, s. 1 – 24.
Schlick, M.: *Budoucnost filosofie*. P*řeložil Prokop Sousedík*. In: *Organon F*, 2002, s. 406 – 418.
Strawson, P. F.: *Individuá: Esej o deskriptivnej metafyzike*. Z *anglického originálu přeložil M.* Zouhar. Bratislava : Iris, 1997.
Sousedík, P.: Rigorizace infinitezimálního počtu a obrat k jazyku (Kant – Bolzano – Frege). In: *Organon F* 13, č. 1, 2001, s. 32 – 54.
Sousedík, P. – Svoboda, D.: Fregovo pojetí aplikace matematiky. In: *Filosofický časopis – mimořádné číslo* 3, 2015, s. 101 – 124.
Wittgenstein, L.: *Filosofická zkoumání*. Přeložil Jiří Pechar. Praha : Filosofia, 1998.

Mgr. Ing. Prokop Sousedík Ph.D.
Filosofický ústav Akademie věd ČR,
Jilská 1, 110 00 Praha 1,
Česká republika
prokop.sousedik@ktf.cuni.cz